PIANO EUCLIDEO (geometria eucdea)

I concetti primitivi e i primi assiomi della geometria euclidea

I concetti primitivi

Assumeremo come primitivi i concetti di: **punto; retta; piano.**

Per questi concetti, di cui non diamo una definizione, possiamo fare riferimento a delle immagini intuitive:

a. il concetto di punto ci può essere suggerito da un granello di sabbia o dalla traccia lasciata sul foglio dalla punta di una matita;
b. il concetto di retta ci può essere suggerito dall'immagine di un raggio di luce o di una corda ben tesa, immaginata estesa indefinitamente;
c. il concetto di piano ci può essere suggerito da un foglio di carta, dal piano di un tavolo o dalla superficie piatta di un lago, immaginati estesi indefinitamente.

Per convenzione, indicheremo:

a. i punti con le lettere maiuscole dell'alfabeto: A, B, C, D ...
b. le rette con le lettere minuscole dell'alfabeto: r, s, t ...
c. i piani con le lettere minuscole dell'alfabeto greco: α, β, γ ...

Assiomi di appartenenza

Gli assiomi stabiliranno delle relazioni fra i punti, le rette e i piani.

ASSIOMA 1 |

Ogni piano è un insieme di punti. Ogni retta è un sottoinsieme del piano.

ASSIOMA 2 | Assiomi di appartenenza della retta

a. A ogni retta appartengono almeno due punti distinti.
b. Dati due punti distinti, esiste una e una sola retta alla quale appartengono entrambi.
c. Data una retta nel piano, esiste almeno un punto del piano che non appartiene a essa.

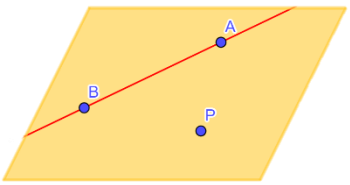


Figura 1

www.impariamonline.altervista.org

Assiomi d'ordine

ASSIOMA 3 | Assiomi d'ordine della retta

I punti di una retta possono essere ordinati in modo che valgano le seguenti proprietà:

a. dati due punti distinti A e B, tali che A precede B, esiste sempre un punto C compreso tra A e B (cioè tale che A precede C e C precede B) (**fig.2**);

b. dato un punto P, esistono sempre due punti A e B, tali che A precede P e P precede B (**fig.3**).



Figura 2



Figura 3

DEFINIZIONE | Fascio proprio di rette

L'insieme delle infinite rette che passano per un punto del piano si chiama fascio proprio di rette; il punto per cui passano tutte le rette del fascio si chiama centro del fascio. (**fig.4**)

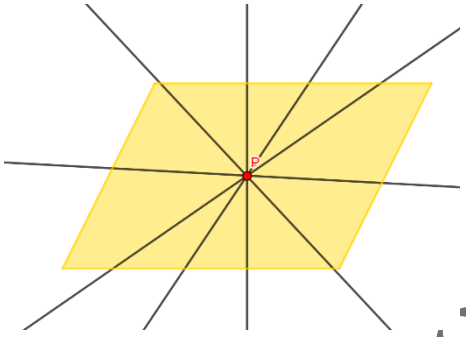


Figura 4

Le parti della retta e le poligonali

Figure e notazione insiemistica

DEFINIZIONE | Figura geometrica

Chiamiamo figura geometrica ogni sottoinsieme del piano.

Dal momento che una figura geometrica è un sottoinsieme del piano, per le figure geometriche si utilizza spesso la **notazione insiemistica**.

Osserva la **fig.5**, dove *r* ed *s* sono due rette che giacciono sul piano α.

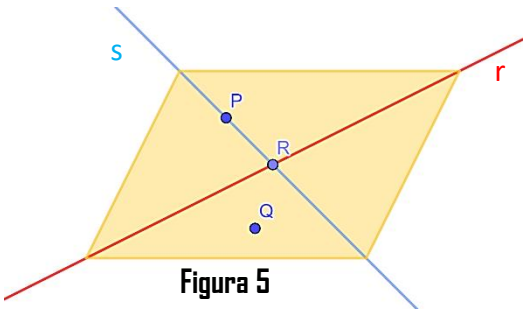


Figura 5

Utilizzando la simbologia insiemistica, possiamo scrivere che:

$P \in s$ $\qquad$ $r \cap s = \{R\}$

$Q \notin r$ $\qquad$ $r \cup \alpha = \alpha$

Semirette

DEFINIZIONE | Semiretta

Data una retta e un suo punto, si chiama semiretta la figura costituita dal punto e da una delle due parti in cui la retta è divisa dal punto stesso. Il punto si dice origine della semiretta.

I punti di una semiretta diversi dall'origine si dicono **interni** alla semiretta. Ogni retta resta dunque divisa da un suo punto O in due semirette; si dice che queste due semirette sono **opposte**; la retta su cui giacciono due semirette opposte si chiama **sostegno** delle semirette.

Segmenti e poligonali

DEFINIZIONE | Segmento

Dati due punti A e B su di una retta, chiamiamo segmento AB l'insieme costituito dai due punti A e B e da tutti i punti compresi tra A e B (**fig. 6**).
I punti A e B si dicono estremi del segmento; i punti del segmento diversi dagli estremi si dicono interni al segmento.

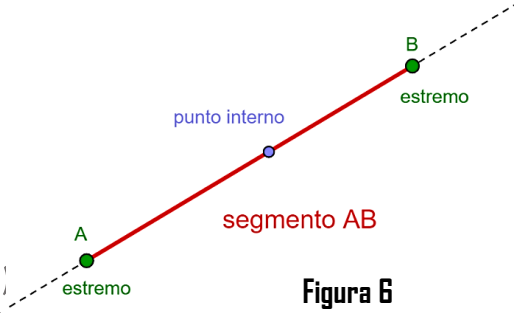


Figura 6

DEFINIZIONE | Segmenti consecutivi

Due segmenti che hanno in comune uno e un solo estremo si dicono consecutivi (**fig. 7**).

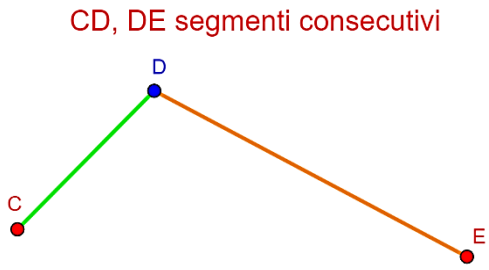


Figura 7

DEFINIZIONE | Segmenti adiacenti

Due segmenti che sono consecutivi e appartengono alla stessa retta si dicono adiacenti (**fig. 8**).

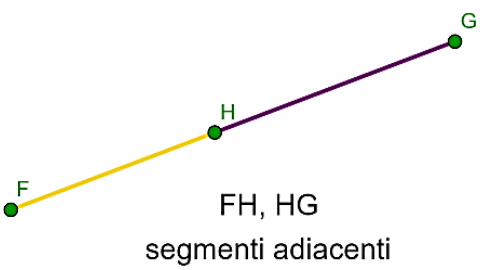


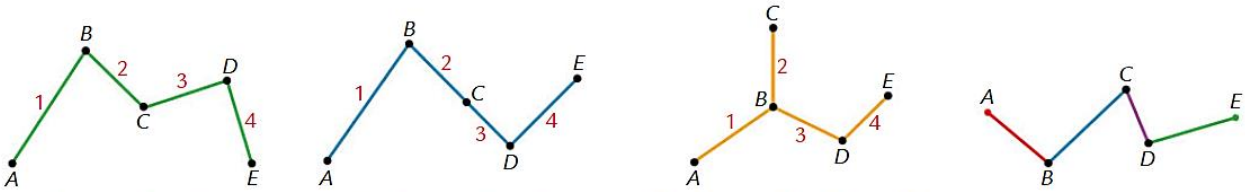
Figura 8

DEFINIZIONE | Poligonale

Si chiama poligonale la figura formata da un insieme ordinato di segmenti, tali che:

a. ciascun segmento e il successivo siano consecutivi ma non adiacenti;

b. ciascun estremo dei segmenti sia in comune al massimo a due di essi. I segmenti si dicono lati della poligonale e i loro estremi vertici della poligonale.



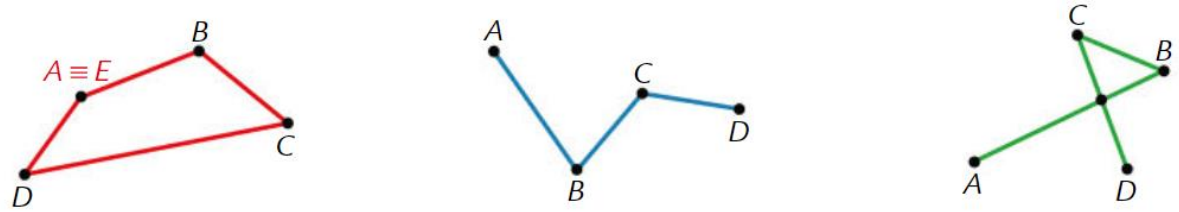
È una poligonale

Non è una poligonale, perché *BC* e *CD* sono adiacenti (cade la condizione **a.** della definizione)

Non è una poligonale, perché l'estremo *B* è in comune a tre segmenti (cade la condizione **b.** della definizione)

Figura 9

Se il primo e l'ultimo estremo di una poligonale coincidono, la poligonale si dice ***chiusa*** (**fig. 10a**), altrimenti si dice ***aperta*** (**fig. 10b**). Inoltre, se due lati non consecutivi di una poligonale hanno un punto in comune, la poligonale si dice ***intrecciata*** (fig. **10c**).



a. poligonale chiusa

b. poligonale aperta

c. poligonale aperta intrecciata

Figura 10

Semipiani e angoli

DEFINIZIONE | Figure concave e convesse

Una figura geometrica F si dice convessa se, comunque scelti due punti A, B ∈ F, il segmento AB è tutto contenuto in F. Una figura non convessa si dice concava.

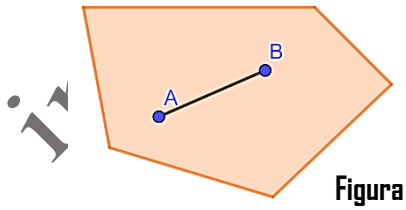


Figura 11

Figura CONVESSA:
comunque scelti due punti A e B appartenenti alla figura, il segmento AB è tutto contenuto in essa.

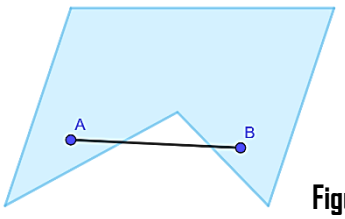


Figura 12

Figura CONCAVA:
il segmento AB non è tutto contenuto in essa.

Le rette, le semirette e i segmenti sono figure convesse. Per convenzione, si considera una figura convessa anche il punto.

Semipiani

DEFINIZIONE | Semipiano

Data una retta in un piano, si chiama semipiano la figura costituita dalla retta e da una delle due parti in cui il piano è diviso dalla retta stessa. La retta si dice origine (o frontiera) del semipiano (**fig. 13**).

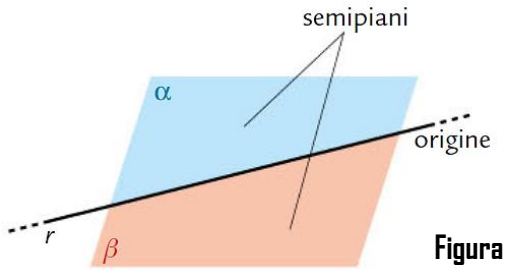


Figura 13

Ogni retta separa quindi il piano in due semipiani, che si dicono **opposti**. Si dicono **punti interni** a un semipiano quelli che appartengono al semipiano ma non alla sua origine.

DEFINIZIONE | Angolo

Date in un piano due semirette aventi la stessa origine, si chiama angolo la figura costituita dalle due semirette e da una delle due parti in cui il piano è diviso dalle semirette stesse. L'origine delle due semirette si chiama vertice dell'angolo e le due semirette si chiamano lati dell'angolo (**fig. 14**)

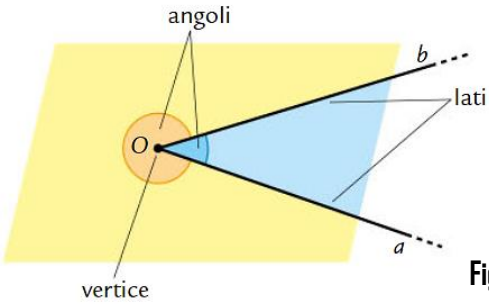
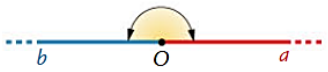


Figura 14

Angolo piatto, angolo giro, angolo nullo. Si danno dei nomi particolari agli angoli i cui lati sono semirette opposte o coincidenti (**Tab.1**).

Tabella 1

Angolo piatto	Angolo giro	Angolo nullo
 Chiamiamo **angolo piatto** ogni angolo che ha come lati una coppia di semirette opposte.	 Chiamiamo **angolo giro** ogni angolo che ha come lati due semirette coincidenti e che coincide con l'intero piano.	 Chiamiamo **angolo nullo** ogni angolo che ha come lati due semirette coincidenti e che non contiene altri punti oltre a quelli dei suoi lati.

RIFLETTI

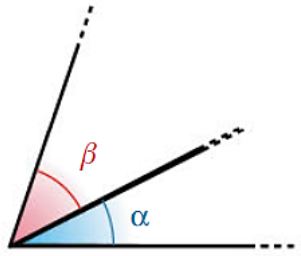
L'angolo nullo, l'angolo piatto e l'angolo giro sono tutti angoli convessi.

Angoli consecutivi, adiacenti e opposti al vertice

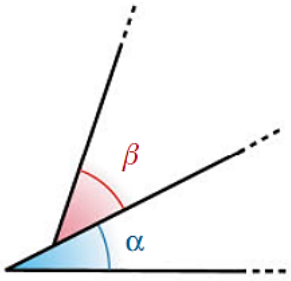
Anche per gli angoli, in modo simile a quanto fatto per i segmenti, si danno le definizioni di angoli consecutivi e angoli adiacenti.

DEFINIZIONE | Angoli consecutivi

Due angoli si dicono consecutivi se hanno lo stesso vertice e se hanno in comune soltanto i punti di un lato (**fig. 15**).



α e β sono consecutivi

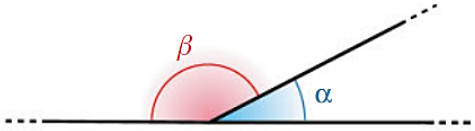


α e β **non** sono consecutivi perché *non* hanno lo stesso vertice

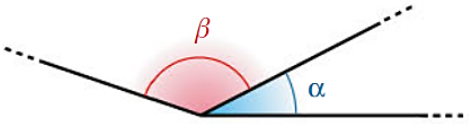
Figura 15

DEFINIZIONE | Angoli adiacenti

Due angoli si dicono adiacenti se sono consecutivi e se i lati non comuni appartengono alla stessa retta (**fig. 16**).



α e β sono adiacenti

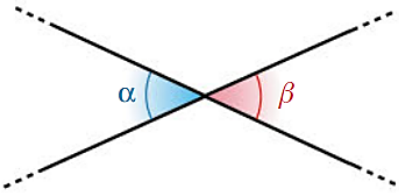


α e β **non** sono adiacenti perché i lati non comuni *non* appartengono alla stessa retta

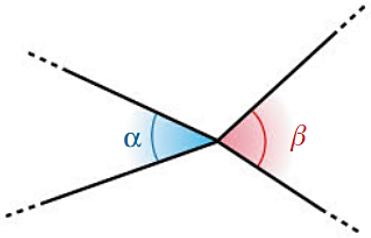
Figura 16

DEFINIZIONE | Angoli opposti al vertice

Due angoli si dicono opposti al vertice se sono convessi e i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro (**fig. 17**).



Gli angoli α e β sono opposti al vertice



Gli angoli α e β **non** sono opposti al vertice

Figura 17

Poligoni

La definizione di poligono

DEFINIZIONE | Poligono

Consideriamo una poligonale chiusa e non intrecciata. Chiamiamo poligono la figura formata dalla poligonale e dai punti interni a essa. I vertici e i lati della poligonale si chiamano vertici e lati del poligono. La poligonale si dice anche contorno o frontiera del poligono (**fig. 18**).

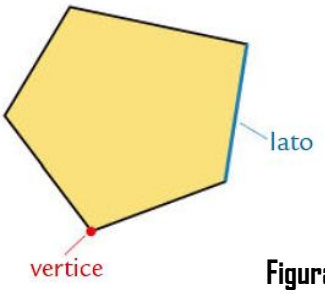
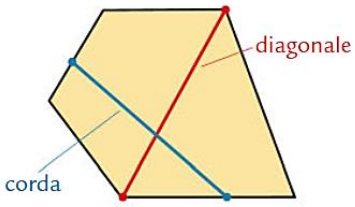


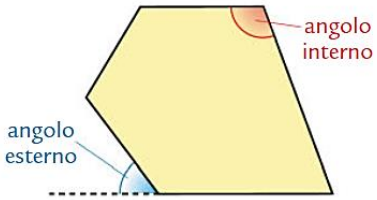
Figura 18

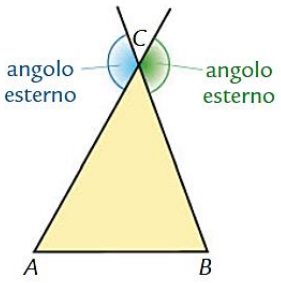
Altre definizioni

Dato un poligono, chiamiamo:

1. **diagonale** ogni segmento che congiunge due suoi vertici non consecutivi;
2. **corda** ogni segmento che congiunge due punti del contorno del poligono appartenenti a due lati distinti;
3. **angolo interno** ogni angolo convesso individuato da due lati consecutivi del poligono e dal vertice in comune ai due lati;
4. **angolo esterno** ogni angolo adiacente a un angolo interno.







www.impariamonline.altervista.org